

УДК 539.3

*П. Я. Носатенко***УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОИСТОГО АНИЗОТРОПНОГО КОЛЬЦА***P. Ya. Nosatenko***STABILITY OF A LAMINATED ANISOTROPIC RING**

On the basis of an approximate model an analytical solution is obtained for the problem of plane buckling of a laminated anisotropic ring subjected to radial loading. The influence of anisotropy on the critical load is estimated for asymmetric structure of a package of layers. A comparison is given for the finite-element solution of three-dimensional problem of stability. It is shown that the calculations based on the orthotropic model may lead to a considerable overestimation of the critical load.

Известно много работ, посвященных изучению эффектов анизотропии (неортотропии) в композитных тонкостенных конструкциях. В основном они связаны с расчетом напряженного состояния [1...5] и свободных колебаний [6...9] на основе уточненных подходов (включая решение уравнений трехмерной теории упругости [3...5, 9]) различными численными методами. Влияние анизотропии на устойчивость исследовано в значительно меньшей степени [10, 11] и также преимущественно численно. В этих условиях значительный интерес приобретают аналитические решения модельных задач устойчивости анизотропных систем, позволяющие оценить вклад того или иного фактора в значение критической нагрузки.

В настоящей работе представлено решение задачи о плоской форме потери устойчивости слоистого анизотропного кольца, обобщающее одну из известнейших в прикладной теории упругости формулу для радиальной критической нагрузки [12] (аналог формулы Леви для критического давления [13]). Результаты расчета на основе построенной простейшей модели сопоставлены с численным решением трехмерной задачи устойчивости при упругих свойствах слоев с анизотропией более общего вида, чем криволинейная ортотропия.

Отнесем замкнутое круговое кольцо к цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$ . Радиус срединной поверхности кольца  $R$ .  $N$  слоев общей толщиной  $H$  жестко скреплены между собой по граничным цилиндрическим поверхностям и являются цилиндрически анизотропными с одной плоскостью упругой симметрии, перпендикулярной оси  $z$  (подобная механическая модель принята в [5] при исследовании напряженного состояния полого цилиндра). По внешней боковой поверхности кольца нагружено радиальной равномерно распределенной нагрузкой  $p$ , сохраняющей первоначальное направление и после потери устойчивости (упругая система консервативна). И для начального и для отклоненного состояний будем рассматривать случай плоской деформации, когда перемещения  $u_z = 0$  и производные  $\partial(\dots)/\partial z = 0$  для всех компонент перемещений, деформаций и напряжений. Считая кольцо достаточно тонким, для начального осесимметричного напряженного состояния будем принимать во внимание лишь окружные напряжения  $\sigma_{\theta\theta}^0$ , приближенно вычисляемые по формуле

$$\sigma_{\theta\theta}^0 = -pR/H. \quad (1)$$

Для описания отклоненного состояния примем кинематическую гипотезу единой прямой для всего пакета слоев при отсутствии обжатия (гипотезу Тимошенко):

$$u_r = w(\theta); \quad u_\theta(\gamma, \theta) = v(\theta) + \gamma\beta(\theta); \quad \gamma = r - R; \\ \gamma \in [-H/2, H/2], \quad (2)$$

а в соотношениях обобщенного закона Гука будем пренебрегать нормальными поперечными напряжениями,  $\sigma_{rr} \approx 0$ . Кроме того, срединную поверхность кольца будем считать нерастяжимой [12, 13]:

$$(v' + w)/R = 0 \Rightarrow w = -v'. \quad (3)$$

При принятых допущениях соотношения обобщенного закона Гука [14] для каждого слоя  $k$  имеют вид

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{[k]} = \frac{a_{22}^{[k]}a_{33}^{[k]} - (a_{23}^{[k]})^2}{a_{33}^{[k]}} \sigma_{\theta\theta}^{[k]} + \frac{a_{26}^{[k]}a_{33}^{[k]} - a_{36}^{[k]}a_{23}^{[k]}}{a_{33}^{[k]}} \sigma_{r\theta}^{[k]}; \\ \varepsilon_{r\theta}^{[k]} = \frac{a_{26}^{[k]}a_{33}^{[k]} - a_{36}^{[k]}a_{23}^{[k]}}{a_{33}^{[k]}} \sigma_{\theta\theta}^{[k]} + \frac{a_{66}^{[k]}a_{33}^{[k]} - (a_{36}^{[k]})^2}{a_{33}^{[k]}} \sigma_{r\theta}^{[k]}$$

или в обращенной форме

$$\sigma_{\theta\theta}^{[k]} = C_{22}^{[k]} \varepsilon_{\theta\theta}^{[k]} + C_{26}^{[k]} \varepsilon_{r\theta}^{[k]}; \quad \sigma_{r\theta}^{[k]} = C_{26}^{[k]} \varepsilon_{\theta\theta}^{[k]} + C_{66}^{[k]} \varepsilon_{r\theta}^{[k]}. \quad (4)$$

С учетом (2), (3) квадратично нелинейный вариант деформационных соотношений [15] может быть представлен как

$$\varepsilon_{\theta\theta}(\gamma, \theta) = (\gamma/R) [(v' + v'')/R + e'] + (v + v'')^2/2R^2; \\ \varepsilon_{r\theta}(\theta) = e(\theta); \quad \beta = e + (v + v'')/R. \quad (5)$$

Для определения величины критической нагрузки воспользуемся энергетическим критерием устойчивости [15]

$$\delta\Delta\mathcal{E} = \delta \int_{-H/2}^{H/2} \int_0^{2\pi} (1/2 \tilde{\varepsilon}^T \tilde{C} \tilde{\varepsilon} + \tilde{\sigma} \tilde{\varepsilon}) R d\gamma d\theta = 0, \quad (6)$$

где компоненты векторов  $\tilde{\varepsilon}$  и  $\tilde{\sigma}$  — суть линейные и нелинейные составляющие (5):

$$\tilde{\varepsilon}_1 = (\gamma/R) [(v' + v'')/R + e']; \quad \tilde{\varepsilon}_2 = e; \quad \tilde{\varepsilon}_3 = (v + v'')^2/2R^2; \quad \tilde{\varepsilon}_4 = 0, \quad (7)$$

вектор  $\tilde{\sigma}$  с учетом (1) есть

$$\tilde{\sigma} = [-pR/H, 0]^T, \quad (8)$$

а  $C$  — матрица жесткости обобщенного закона Гука (4) (с компонентами, являющимися кусочно-постоянными разрывными функциями  $\gamma$ ).

Принятая модель учета поперечного сдвига содержит два противоречия: первое — в силу (2) деформации  $\varepsilon_{r\theta}$  неизменны по толщине кольца (5); второе, вытекающее из первого, — при подстановке в (4) для  $\sigma_{r\theta}$  нарушаются условия контакта смежных слоев и краевые условия. Второе противоречие в сдвиговых теориях оболочек часто преодолевается введением дополнительной статической гипотезы типа  $\sigma_{r\theta} = \tau(\theta) \dot{f}(\gamma)$ , где  $\dot{f}(\gamma)$ ,  $\gamma \in [-H/2, H/2]$ ,  $\dot{f}(-H/2) = \dot{f}(H/2) = 0$  — непрерывная функция [1, 2, 16], что, однако, не устраняет первого — постоянства и непрерывности на границах слоев деформаций  $\varepsilon_{r\theta}$ . Учитывая общий характер и единую причину обоих противоречий, а также тот факт, что в случае анизотропных слоев задаться видом  $\dot{f}(\gamma)$  не представляется возможным, не зная заведомо решения задачи теории упругости (он существенно отличается от квадратной параболы [3, 4], принимае-

мой в большинстве случаев по аналогии с однородными оболочками), ограничимся получением приближенного решения задачи устойчивости в рамках изложенного.

Введем изгибную, поперечную сдвиговую и смешанную жесткости:

$$\begin{aligned} D_{22} &= \sum_{k=1}^N \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} C_{22}^{[k]} \gamma^2 d\gamma = 1/3 \sum_{k=1}^N C_{22}^{[k]} (\gamma_k - \gamma_{k-1})^3; \\ A_{66} &= \sum_{k=1}^N \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} C_{66}^{[k]} d\gamma = \sum_{k=1}^N C_{66}^{[k]} (\gamma_k - \gamma_{k-1}); \\ B_{26} &= \sum_{k=1}^N \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} C_{26}^{[k]} \gamma d\gamma = 1/2 \sum_{k=1}^N C_{26}^{[k]} (\gamma_k - \gamma_{k-1})^2; \quad \gamma_0 = -H/2; \\ \gamma_N &= H/2; \quad \gamma_k = \gamma_{k-1} + h^{[k]}; \quad \sum_{k=1}^N h^{[k]} = H, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $h^{[k]}$  — толщина  $k$ -го слоя.

Ввиду периодичности  $v(\theta)$  и  $e(\theta)$  решение задачи (6) будем искать в виде

$$v = v_s \sin(\theta_0 + n\theta) + v_c \cos(\theta_0 + n\theta); \quad e = e_s \sin(\theta_0 + n\theta) + e_c \cos(\theta_0 + n\theta). \quad (10)$$

Здесь параметр волнообразования принимает значения  $n=2, 3, \dots$ , для которых реализуется изгибная форма потери устойчивости. Подставляя (9), (10) с учетом (7), (8) в (6), получаем вариационное уравнение устойчивости

$$\begin{aligned} \delta \left( (n^2 D_{22}/R^3) \{ [(1-n^2)v_s + Re_s]^2 + [(1-n^2)v_c + Re_c]^2 \} + \right. \\ \left. + [2n(1-n^2)B_{26}/R] (v_s e_c - v_c e_s) + A_{66}R(e_s^2 + e_c^2) - \right. \\ \left. - (1-n^2)^2 p (v_s^2 + v_c^2) \right) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что необходимость наличия в (10), (11) одновременно  $\sin$ - и  $\cos$ -составляющих искомых функций связана лишь с учетом анизотропии. В случае, когда оси ортотропии слоев совпадают с координатными направлениями (ортотропное кольцо),  $C_{26}^{[k]}=0$  и  $B_{26}=0$ , уравнение (11) распадается на два эквивалентных:

$$\delta \{ (n^2 D_{22}/R^3) [(1-n^2)v_s + Re_s]^2 + A_{66}R e_s^2 - (1-n^2)^2 p v_s^2 \} = 0; \quad (12)$$

$$s \rightleftharpoons c.$$

Следует также отметить, что для принятого типа анизотропии учесть ее влияние невозможно при пренебрежении поперечным сдвигом: при

$$\epsilon_{r\theta} = e_s = e_c = 0$$

из (11) следует уравнение устойчивости

$$\delta \{ [(n^2 D_{22}/R^3) - p] v_s^2 \} = 0, \quad s \rightleftharpoons c,$$

приводящее к классическому результату [12]

$$p_*^c = n^2 D_{22}/R^3. \quad (13)$$

Переходя в (11) от варьирования к дифференцированию по  $v_s$ ,  $v_c$ ,  $e_s$ ,  $e_c$  и решая получаемую таким образом задачу на собственные значения, находим выражение для критической радиальной нагрузки, которое с учетом (13) можно записать как

$$p_*^a = p_*^c [1 - n^2 D_{22}/S_n - B_{26}^2 R^2 / (D_{22} S_n)]; \quad S_n = n^2 D_{22} + A_{66} R^2. \quad (14)$$

Формула (14) дает возможность всех предельных переходов, рассмотренных выше для (11). В случае ортотропного кольца с низкой поперечной сдвиговой жесткостью имеем

$$p_*^0 = p_*^c (1 - n^2 D_{22} / S_n) \quad (15)$$

[Этот же результат можно получить, решив обобщенную задачу на собственные значения (12)]. При  $A_{66} \rightarrow \infty$  как из (15), так и из (14) приходим к (13).

Для замыкания решения представим соотношения, характеризующие форму потери устойчивости (10):

$$v_c = -v_s; \quad e_s = g_s v_s; \quad e_c = g_c v_s; \quad g_s = n(n^2 - 1)(B_{26}R + D_{22}n) / (RS_n); \quad g_c = n(n^2 - 1)(B_{26}R - D_{22}n) / (RS_n), \quad (16)$$

а также выражения для окружных деформаций отклоненного состояния:

$$\varepsilon_{\theta\theta}(\gamma, \theta) = \varepsilon_s(\gamma) \cos(\theta_0 + n\theta) + \varepsilon_c(\gamma) \sin(\theta_0 + n\theta); \quad \varepsilon_s = (\gamma/R^2) \times \\ \times [n(1 - n^2) + ng_s R] v_s; \quad \varepsilon_c = -(\gamma/R^2) [n(1 - n^2) - ng_c R] v_c. \quad (17)$$

Оценку влияния учета анизотропии на расчетное значение критической нагрузки произведем для композитного кольца, состоящего из четного числа  $N = 2K$  антисимметрично расположенных относительно срединной поверхности слоев постоянной толщины  $h^{[k]} = H/N$ , армированных под углами  $\varphi^{[k]} = (-1)^{k+1} \varphi$  ( $k = 1, \dots, N$ ) по отношению к радиальной координате. Используя формулы преобразования упругих постоянных при повороте осей [17], нетрудно установить, что в этом случае в (4)  $C_{ii}^{[k]} = C_{ii}$  ( $i = 2, 6$ ),  $C_{26}^{[k]} = (-1)^{k+1} C_{26}^{[1]} = (-1)^{k+1} C_{26}$  ( $k = 1, \dots, N$ ). Тогда из (9) следует, что

$$D_{22} = C_{22} H^3 / 12; \quad A_{66} = C_{66} = H; \quad B_{26} = -H^2 C_{26} / 2N. \quad (18)$$

Равенства, аналогичные последнему из (18), часто используются для обоснования возможности пренебрежения анизотропией при расчете композитных конструкций со схемой армирования, сходной с рассматриваемой ( $B_{26} \rightarrow 0$ ).

Подставляя (18) в (14) и принимая  $n = 2$ , для вычисления критической нагрузки получаем формулу

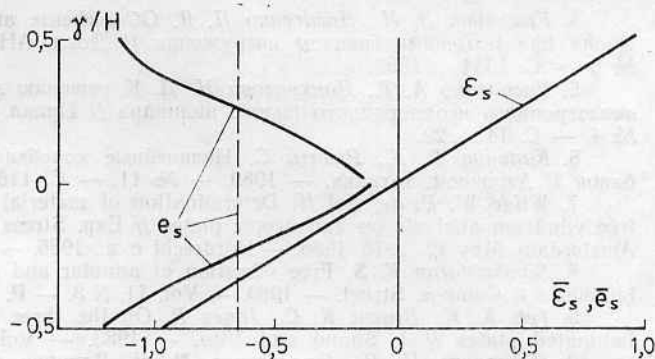
$$p_*^a = \frac{C_{22} H^3}{3R^3} \left[ 1 - \frac{C_{22} H^2}{C_{22} H^2 + 3C_{66} R^2} - \frac{9C_{26}^2 R^2}{N^2 C_{22} (C_{22} H^2 + 3C_{66} R^2)} \right]. \quad (19)$$

Численные результаты определим для кольца с размерами  $R = 0,2$  м и  $H = 8 \cdot 10^{-3}$  м ( $R/H = 25$ ), слой которого изготовлены из однонаправленно армированного под углами  $\varphi = \pm 60^\circ$  борозепоксидного композита (этот модельный материал использовали во многих работах при оценке эффектов анизотропии [2...4]). Коэффициенты (4)  $C_{22} = 5,175 \cdot 10^4$  МПа;  $C_{66} = 2,025 \cdot 10^4$  МПа;  $C_{26} = -2,629 \cdot 10^4$  МПа. Расчеты по формулам (13) и (15) дают значения  $p_*^c = 1,104$  МПа и  $p_*^0 = 1,1025$  МПа (т. е. уточнение за счет учета поперечного сдвига составляет здесь лишь 0,136% от  $p_*^c$ ). В то же время учет анизотропии [использование соотношений (14) или (19)] для двухслойного кольца приводит к значению  $p_*^a = 0,557$  МПа на 49,47% ниже  $p_*^0$ . По формуле (19) легко установить зависимость  $p_*^a$  от количества слоев: для  $N = 4, 6, 8, 10$  имеем  $p_*^a = 0,996, 1,042, 1,068, 1,081$  МПа. Во всех этих случаях эффект анизотропии проявляется сильнее эффекта поперечного сдвига как такового.

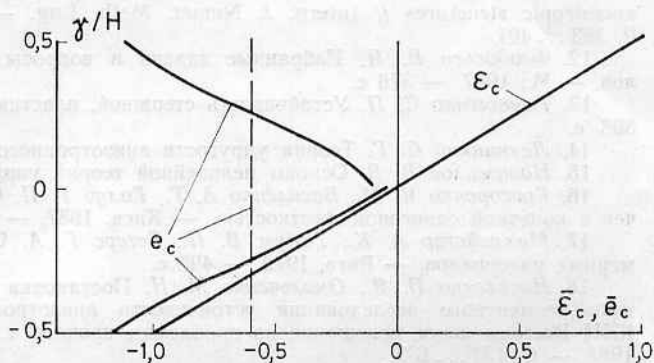
Эта же задача для двухслойного кольца была решена по алгоритму ASRS конечно-элементного расчета упругой устойчивости анизотропных оболочек вращения в трехмерной постановке [18] (начальные напряжения вычисляли по программе AAMS [3, 10]). Получены следующие значения:  $p_{**}^0 = 1,068$  МПа и  $p_{**}^a = 0,374$  МПа. Таким образом, трехмерный анализ, почти не уточняя расчетное критическое значение для



Распределение по толщине двухслойного кольца  $\sin$ - и  $\cos$ -составляющих окружных  $\varepsilon_s$ ,  $\varepsilon_c$  и поперечных сдвиговых  $e_s$ ,  $e_c$  деформаций отклоненного состояния: (—) — конечно-элементное решение трехмерной задачи устойчивости (деформации поперечного сдвига имеют разрыв на границе слоев, непрерывными являются напряжения поперечного сдвига); (---) — решение на основе гипотезы единой прямой для пакета слоев.



Distribution along the thickness of a two-layer ring of  $\sin$ - and  $\cos$ -members of circumferential  $\varepsilon_s$ ,  $\varepsilon_c$  and transverse shear  $e_s$ ,  $e_c$  strains of deflected state: (—) — finite-element solution of the three-dimensional stability problem, where the transverse shear strains on the interlaminar surface are discontinuous, and the transverse shear stresses are continuous; (---) — the solution based on the hypothesis of a united straight line for the packages of layers.



ортотропного кольца, свидетельствует о еще более значительном влиянии анизотропии, чем это следует из (19). Различия приближенного (19) и численного трехмерного решений объясняются в первую очередь большой погрешностью принятого допущения о неизменности деформаций  $\varepsilon_{\theta 0}$  по толщине кольца.

На рисунке в относительном масштабе показаны законы распределения  $e_s$ ,  $e_c$ ,  $\varepsilon_s$ ,  $\varepsilon_c$ , полученные из трехмерного (сплошные линии) и изложенного приближенного (10), (16), (17) (штриховые линии) решений  $\{\bar{\varepsilon} = \varepsilon / \max |e_c(\gamma)|, \bar{e} = e / \max |e_c(\gamma)|\}$ . Если окружные деформации в обоих случаях практически совпадают, то сдвиговые для принятой модели кольца характеризуют лишь среднеинтегральные значения. Допущения (1) и (3) в данной задаче вполне уместны: в трехмерном решении  $-26,2 \leq \sigma_{\theta 0}^0 \leq -24,8$  МПа при значении по формуле (1)  $\sigma_{\theta 0}^0 = -25$  МПа (для  $p = 1$  МПа);  $\varepsilon_s$  и  $\varepsilon_c$  при  $\gamma = 0$  близки к нулю (см. рис.).

В заключение отметим, что влияние анизотропии на устойчивость тонкостенных композитных конструкций может оказаться еще более существенным, чем это установлено в данной работе, поскольку для кольца начальные напряжения слабо зависят от механических свойств.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // Механика композит. материалов. — 1988. — № 2. — С. 287... 298.
2. Куликов Г. М. О влиянии анизотропии на напряженное состояние многослойных армированных оболочек // Прикл. механика. — 1986. — Т. 22, № 12. — С. 66... 72.
3. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. К эффекту анизотропии в перекрестно армированных оболочках // Проблемы механики деформируемого твердого тела. — Калинин, 1986. — С. 120... 129.

4. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. Об эффекте анизотропии в оболочках вращения при изогесимметричном нагружении // Докл. АН СССР. — 1991. — Т. 316, № 6. — С. 1354...1357.
5. Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. К решению задач об упругом равновесии анизотропного неоднородного полого цилиндра // Прикл. механика. — 1990. — Т. 26, № 4. — С. 14...20.
6. Капаниа Р. К., Ричити С. Нелинейные колебания несимметричных слоистых балок // Аэрокосм. техника. — 1989. — № 11. — С. 116...127.
7. Wilde W. P. de, Sol H. Determination of material constants using experimental free vibration analysis on anisotropic plates // Exp. Stress Anal. Proc. 8th Intern. Conf. Amsterdam, May 12...16, 1986. — Dordrecht e. a., 1986. — P. 207...214.
8. Sivakumaran K. S. Free vibration of annular and circular asymmetric composite laminates // Compos. Struct. — 1989. — Vol. 11, N 3. — P. 205...226.
9. Teh K. K., Brown K. C., Jones R. On the three dimensional analysis of thick laminated plates // J. Sound and Vibr. — 1983. — Vol. 88, N 2. — P. 213...224.
10. Носатенко П. Я., Омельченко М. Н. Влияние анизотропии на устойчивость перекрестно армированной цилиндрической оболочки // Механика композит. материалов. — 1991. — № 1. — С. 167...169.
11. Noor A. K., Peters J. M. Buckling and post buckling analysis of laminated anisotropic structures // Intern. J. Numer. Meth. Eng. — 1989. — Vol. 27, N 2. — P. 383...401.
12. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. — М., 1967. — 376 с.
13. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. — М., 1971. — 808 с.
14. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. — М., 1977. — 415 с.
15. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. — Л., 1948. — 211 с.
16. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Голуб Г. П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. — Киев, 1987. — 216 с.
17. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов. — Рига, 1972. — 498 с.
18. Носатенко П. Я., Омельченко М. Н. Постановка пространственной задачи конечно-элементного исследования устойчивости анизотропных оболочек вращения. // XXII Всесоюз. науч. совещание по проблемам прочности двигателей. Тез. докл. — М., 1988. — С. 137...139.

Научно-производственное объединение  
машиностроения, Московская обл.

Поступила в редакцию 26.06.91  
Окончательный вариант поступил 01.10.91

Received June 26, 1991 (Oct. 1, 1991)